

Analysis III

ÜBUNGSBLATT 9

1. Konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ sind Lebesgue-messbar und ihre topologischen Ränder sind Borel-Nullmengen.

Hinweis: Approximieren Sie (topologisch) von innen durch das Innere und von außen durch dessen Bilder unter zentrischen Streckungen an einem inneren Punkt.

- 
2. Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$, so auch $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$ und es gilt

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

3. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Dann ist jede messbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ der monotone Limes $\tau_n \nearrow f$ einer Folge messbarer Treppenfunktionen $\tau_n : X \rightarrow [0, \infty)$.
4. Eine Regelfunktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Borel-messbar und ihr Integral im Sinne von Analysis I stimmt mit ihrem Lebesgue-Integral überein,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\beta^1 := \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a, b]} f d\beta^1.$$

5. Wir betrachten den Vektorraum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \beta^d)$ versehen mit der Halbnorm $\| \cdot \|_1$ (vgl Vorlesung am Montag) gegeben durch

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |f| d\beta^d$$

und der von ihr induzierten Topologie.

(i) Die charakteristischen Funktionen der Quader in $\mathcal{Q}^d$ spannen einen dichten Untervektorraum von $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ auf.

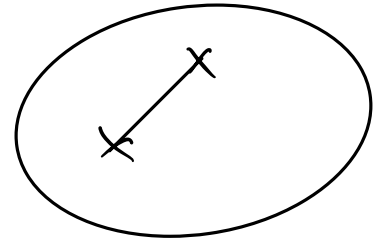
(ii) Der Raum $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ mit kompaktem Träger ist ein dichter Untervektorraum von $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Wenn Sie Ihre Übungen bis Freitag dem 22.12.2023 um 16:00 Uhr in Moodle einreichen, versuchen wir Ihnen zu möglichst vielen Ihrer Abgaben eine Rückmeldung zu geben. Bitte benennen Sie die Datei als B9_Name1_Name2, wenn Sie z.B. zu zweit abgeben, wobei Name1 der Nachname der einreichenden Person sein sollte.

1. Konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ sind Lebesgue-messbar und ihre topologischen Ränder sind Borel-Nullmengen.

Hinweis: Approximieren Sie (topologisch) von innen durch das Innere und von außen durch dessen Bilder unter zentrischen Streckungen an einem inneren Punkt.

Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex



Beh: 1) K ist Lebesgue-messbar

2) ∂K ist Borel-Nullmenge

Beweis:

$$\text{zu 1) (*) } K = \underbrace{\overset{\text{"innere"}}{\overset{\circ}{K}}}_{\substack{\text{Lebesgue-messbar} \\ \text{als Borel-Menge}}} \cup \underbrace{K \setminus \overset{\circ}{K}}_{\substack{\text{NI} \\ \partial K := \bar{K} \setminus \overset{\circ}{K} \\ \sim \text{"Rand"}}}$$

1. Schritt: $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{K \cap B_n(0)}_{\substack{\text{beschränkte konvexe} \\ \text{Mengen}}}$

Also genügt es zu zeigen, dass beschränkte konvexe Mengen Lebesgue-messbar sind.

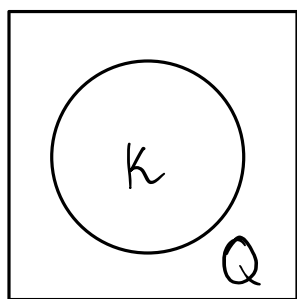
Ferner:

$$\partial K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \partial(K \cap B_n(0))$$

Also genügt es zu zeigen, dass Ränder beschränkter konvexer Mengen Borel-Nullmengen sind.

Also jetzt K beschränkt

Es genügt zu zeigen: ∂K ist Lebesgue-Nullmenge.



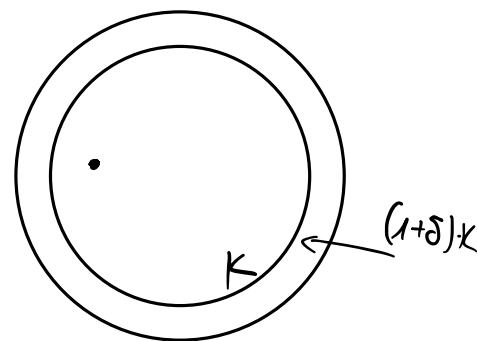
$$\leadsto \lambda^*(K) \leq \lambda^*(Q) < \infty$$

Falls $\overset{\circ}{K} = \emptyset \Rightarrow K \subset \text{Hyperebene}$
 $\parallel$
 Nullmenge

Sonst oBdA $0 \in \overset{\circ}{K}$.

Sei $\delta > 0$. Dann

$$\partial K \subset (1+\delta) \cdot \overset{\circ}{K} \setminus \overset{\circ}{K}$$



$$\Rightarrow \beta^d(\partial K) \leq \beta^d((1+\delta) \overset{\circ}{K}) - \beta^d(\overset{\circ}{K})$$

$$= ((1+\delta)^d - 1) \cdot \beta^d(\overset{\circ}{K})$$

$$\begin{aligned} (1+\delta)^d - 1 &= 1 + \delta + \delta^2 + \dots + \delta^{d-1} - 1 \\ &= \delta(1 + \dots + \delta^{d-2}) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\delta < 1}{\leq} \delta \cdot 2^d \cdot \beta^d(\overset{\circ}{K})$$

$$\underbrace{\delta \cdot 2^d}_{\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0} \cdot \underbrace{\beta^d(\overset{\circ}{K})}_{< \infty} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \beta^d(\partial K) = 0$$

$\Rightarrow \partial K$ Borel-Nullmenge

$\Rightarrow K \setminus \overset{\circ}{K}$ Lebesgue-Nullmenge

$\Rightarrow K = \overset{\circ}{K} \cup K \setminus \overset{\circ}{K}$ Lebesgue-messbar.

2. Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$, so auch $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$ und es gilt

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

A2

$$(X, \mathcal{A}, \mu), (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad f_n \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$$

Beh $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$

$$\text{und} \quad \int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_X f_k d\mu \right)$$

Beweis: $g_n = \sum_{k=1}^n f_k \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$

$$g_n \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k \quad \left(\begin{array}{l} \text{Vgl. Vorlesung Stabilität} \\ \text{unter Grenzwerten} \end{array} \right)$$

Monotone Konvergenz von B. Levi

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu \stackrel{\substack{\text{mon.} \\ \text{Konvergenz}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu$$

$$\stackrel{\text{Linearität}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \int_X f_k d\mu \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_X f_k d\mu \right)$$

Aufgabe 2:

2. Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$,
so auch $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$ und es gilt

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Beh $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$ und $\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$

Beweis:

$$g_n = \sum_{k=1}^n f_k \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$$

$$g_n \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

• Monotone Konvergenz von B. Levi:

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu \stackrel{\text{Mon. Konv.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu$$

Linearität

$$\stackrel{\text{Linearität}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_X f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_X f_k d\mu \right)$$

3. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Dann ist jede messbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ der monotone Limes $\tau_n \nearrow f$ einer Folge messbarer Treppenfunktionen $\tau_n : X \rightarrow [0, \infty)$.

$(X, \mathcal{A})$ Messraum.

Beh: Jedes $f \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$ ist monotoner Limes $\tau_n \nearrow f$ einer Folge messbarer Treppenfkt

Beweis: Zu solchem f setze

$$\hat{\tau}_n := \frac{1}{n} \lfloor n \cdot f \rfloor, \quad \tau_n = \min(\hat{\tau}_n, n)$$

Beh: $\hat{\tau}_n$ ist messbar ($\Rightarrow \tau_n$ messbar)

$$\hat{\tau}_n \text{ messbar} \Leftrightarrow \lfloor n \cdot f \rfloor \text{ messbar}$$

$$\underbrace{(\lfloor n \cdot f \rfloor)^{-1}([-\infty, a))}_{\substack{\uparrow \\ \lfloor x \rfloor < a \Leftrightarrow x < \lceil a \rceil}} = \underbrace{(n \cdot f)^{-1}([-\infty, \lceil a \rceil))}_{\substack{\text{messbar,} \\ \text{da } f \text{ und } n \cdot f \text{ messbar.}}}$$

$$\Rightarrow \hat{\tau}_n \text{ messbar} \Rightarrow \tau_n \text{ messbar.}$$

Beh: $\hat{\tau}_n$ steigt schwach monoton

Für x mit $f(x) = \infty$ gilt $\hat{\tau}_n(x) = \infty$

Für x mit $f(x) < \infty$ ist zu zeigen $\frac{1}{n} \cdot \lfloor n \cdot \overset{f(x)}{y} \rfloor \leq \frac{1}{n+1} \lfloor (n+1) \cdot y \rfloor$

$$\Leftrightarrow (n+1) \lfloor n \cdot y \rfloor \leq n \lfloor (n+1) \cdot y \rfloor \Leftrightarrow \dots$$

$$\Rightarrow \tau_n \text{ steigt monoton}$$

Beh: $\tau_n \nearrow f$

Beweis: Falls $f(x) = \infty \Rightarrow \tau_n(x) = n \nearrow \infty$, sonst $\tau_n(x) \leq f(x) \leq \tau_n(x) + \frac{1}{n}$ für $n > f(x) \Rightarrow \tau_n(x) \nearrow f(x)$

4. Eine Regelfunktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Borel-messbar und ihr Integral im Sinne von Analysis I stimmt mit ihrem Lebesgue-Integral überein,

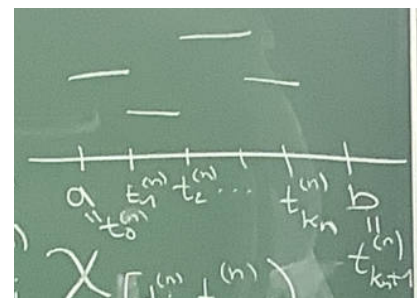
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\beta^1 := \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]} f d\beta^1.$$

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfkt.

Ana 1 $\iff f$ ist treppennäherbar, d.h.

es gibt Treppenfkt $\tau_n = \sum_{i=0}^{k_n} \lambda_i^{(n)} \chi_{[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})}$, $\lambda_i^{(n)} \in \mathbb{R}$

$$\tau_n \xrightarrow[\text{an } f \text{ auf } [a,b]]{\text{glm}} f$$



Beh. f ist Borel-messbar und

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\beta^1 := \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]} f d\beta^1$$

Beweis: können annehmen, dass $f \geq 0$ (sonst betrachte f_+ u. f_- getrennt.)

o.B.d.A. $\|\tau_n - f\|_{[a,b]} < \frac{1}{n}$ (durch Wahl von Teilfolge)

Sei $\tilde{\tau}_n = \tau_n - \frac{1}{n}$ Treppenfkt mit

$$\bullet \tilde{\tau}_n \leq f$$

$$\bullet \tilde{\tau}_n \xrightarrow{\text{glm}} f$$

also

$$\text{OBdA } \tau_n \leq f$$

Sei $\hat{\tau}_n = \max\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ Treppenfkt mit

$$\bullet \hat{\tau}_n \leq f$$

$$\bullet \hat{\tau}_n \nearrow f \text{ g.l.m.} \rightsquigarrow \text{OBdA } \tau_n \nearrow f$$

Beachte: Treppenfkt im Sinne von Ana I sind

Borel-messbare Treppenfunktion im Sinne von Ana III

Aufg 3 $\Rightarrow f$ Borel messbar

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \tau_n(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^{(n)} \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{\beta^1([t_i, t_{i+1}))} \right)$$

$\uparrow$
unabhängig von Wahl (Ana I)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \tau_n d\beta^1 \stackrel{\text{Def.}}{=} \int_{[a,b]} f d\beta^1.$$

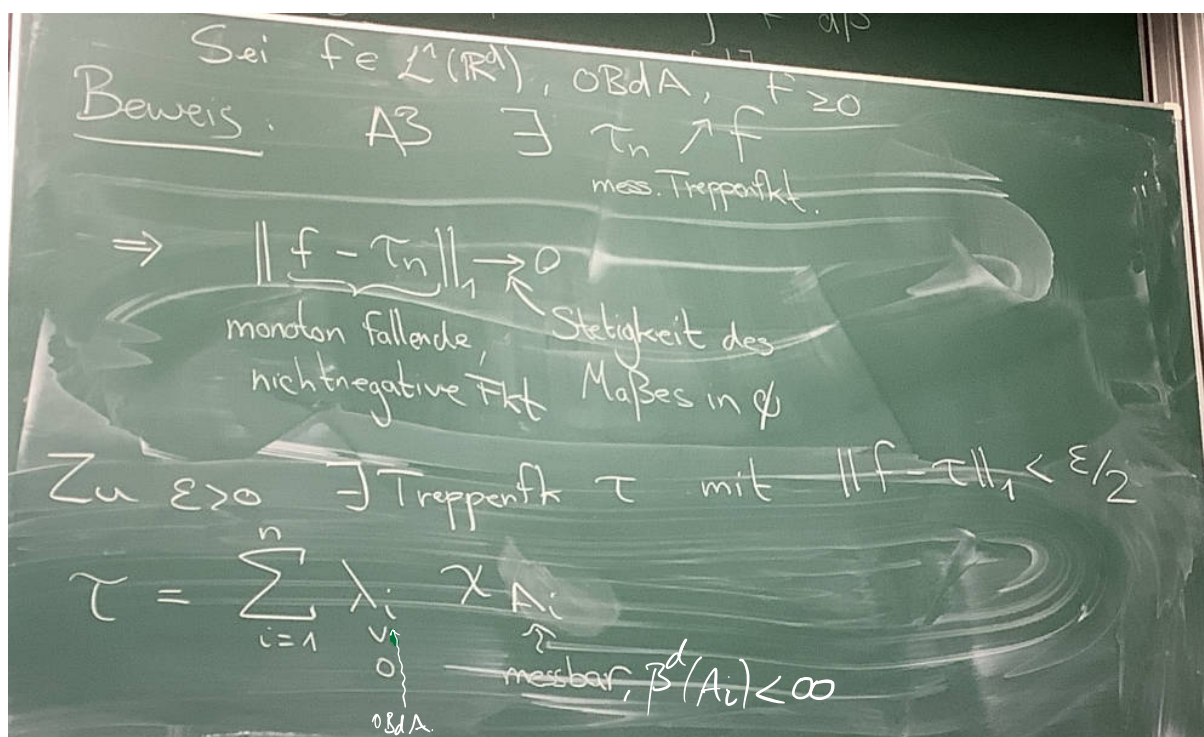
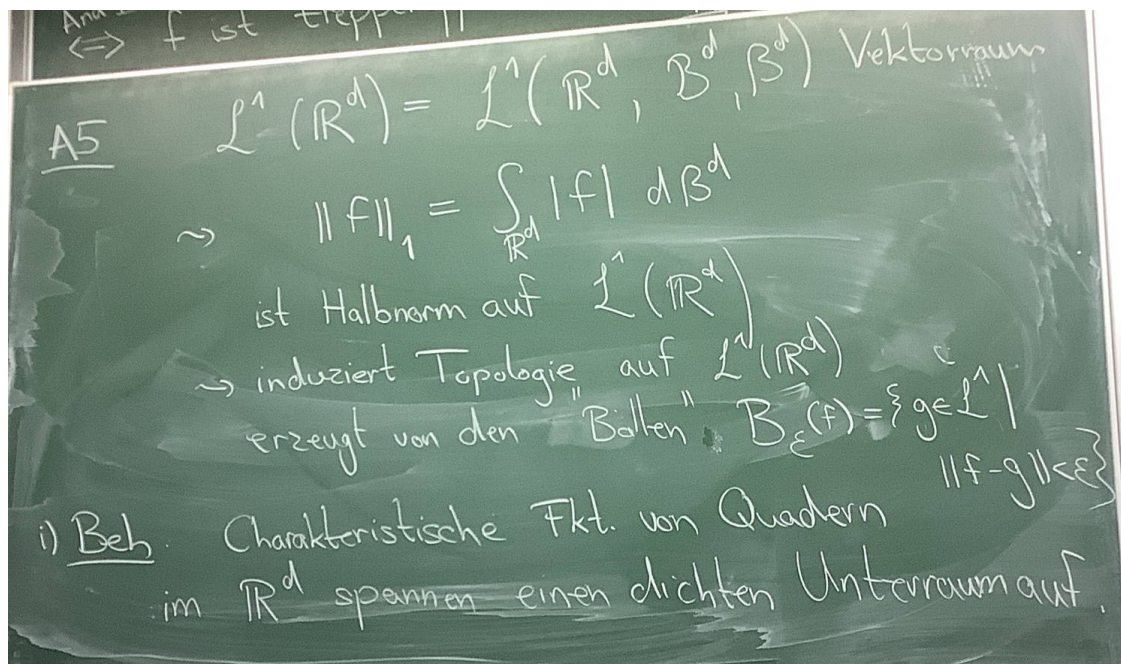
5. Wir betrachten den Vektorraum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \beta^d)$ versehen mit der Halbnorm $\|\cdot\|_1$ (vgl Vorlesung am Montag) gegeben durch

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |f| d\beta^d$$

und der von ihr induzierten Topologie.

(i) Die charakteristischen Funktionen der Quader in $\mathcal{Q}^d$ spannen einen dichten Untervektorraum von $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ auf.

(ii) Der Raum $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ mit kompaktem Träger ist ein dichter Untervektorraum von $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.



Summe endlich $\rightarrow$ genügt χ_A , A messbar
 $\beta^d(A) < \infty$,
 zu approximieren.

$$\beta^d(A) = \inf \left\{ \sum_i \beta^d(Q_i), Q_i \text{ disjunkte Quader, } A \subset \bigcup_i Q_i \right\}$$

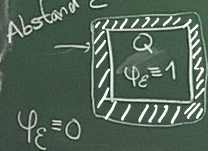
$\Rightarrow \exists$ Überdeckung disjunkter Quader s.d. $\beta^d(A \Delta \bigcup_i Q_i)$ bel. klein.

$$\|\chi_A - \sum_i \chi_{Q_i}\| =$$

ii) Beh. $C_c(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Beweis: Nach i) genügt es charakteristische Fkt von Quadern bzgl. $\|\cdot\|_1$ durch stetige Fkt zu approximieren.

Sei $Q \subset \mathbb{R}^d$ Quader. Sei



$$d_Q(x) = \min_{q \in Q} \|x - q\|$$

$\varepsilon > 0$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} d_Q(x)\right)_+$$

stetig, $\geq 0, \leq 1$

$$\|\chi_Q - \varphi_\varepsilon\|_1 \leq \lambda^d(\{0 < d_Q < \varepsilon\}) \rightarrow 0$$

